MAT-13440 LAAJA MATEMATIIKKA 4

Tampereen teknillinen yliopisto
Risto Silvennoinen
Kevät 2010

Luku 3. Raja-arvot. Osittaisderivaatat.

1. Funktioiden raja-arvot

Tarkastelemme funktioita $f : A \to \mathbb{R}$, joiden määrittelyjoukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Muuttujat ovat siis vektoreita $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$, jolloin myös sanotaan, että funktio *f* on *n*:n muuttujan funktio.

Derivointia varten tarvitsemme funktion raja-arvon käsitteen. Periaate on sama, kuin jatkuvuutta määriteltäessä: Kun muuttujapuolella on joukon *A* pisteiden jono $\{\mathbf{x}_k\}$ joka lähestyy jotain pistettä $\mathbf{x}_*$ kohti, kuvapuolella funktion vastaavien arvojen $f(\mathbf{x}_k)$ jono lähestyy (mahdollisesti) jotain arvoa ℓ kohti. Jos tämä raja-arvo on olemassa ja sama *jokaisella* pistettä $\mathbf{x}_*$ kohti suppenevalla jonolla $\{\mathbf{x}_k\}$, niin funktiolla $f : A \to \mathbb{R}$ on **raja-arvo** ℓ, kun $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_*$:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_*} f(\mathbf{x}) = \ell .$$

Muuttujapuolella tuo piste $\mathbf{x}_*$ ei välttämättä kuulu joukkoon *A*. Silloin riittää, että se on joukon *A* **kasautumispiste** (limit point, rajapiste) eli että on olemassa joukon $A \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ pisteistä koostuva jono, joka suppenee kohti pistettä $\mathbf{x}_*$.
Sellainen piste $\mathbf{x}_*$, joka joko kuuluu joukkoon *A* tai on *A*:n kasautumispiste, on joukon *A* **kosketuspiste**.

Jatkuvan funktion tapauksessa pisteen $\mathbf{x}_*$ toki on kuuluttava joukkoon A. Saamme siis funktion jatkuvuudelle seuraavan karakterisoinnin:

Lause 1. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on pisteessä $\mathbf{x}_* \in A$ jatkuva, jos ja vain jos

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_*} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_*)$$

Jonojen raja-arvoja koskevista tuloksista saadaan funktioiden summille, tuloille ja osamäärille luonnolliset, reaalifunktioille tutut laskusäännöt (ks. Laaja matematiikka 3.).

Verrattuna (yhden) reaalimuuttujan funktion raja-arvoihin, useamman muuttujan funktioiden raja-arvojen laskeminen on yleensä huomattavasti vaikeampaa. Tämä johtuu lähinnä siitä, että **lähestymistapoja** on paljon enemmän. Esimerkiksi lähestymissuuntia on äärettömän monta, kun niitä reaaliakselilla on vain kaksi.

Esim. 1 Raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$ ei ole olemassa, koska lähestyminen pitkin koordinaattiakseleita johtaa eri arvoihin: x-akselia pitkin lähestyttäessä lähestyy lauseke arvoa -1, ja y-akselia pitkin arvoa 1.

Esim. 2 Raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ ei myöskään ole. Tosin koordinaattiakseleita pitkin lähestyminen johtaa arvoon 0, mutta paraabelia $x = y^2$ pitkin lähestyttäessä lähestytään arvoa ½.

Esim. 3 Funktiolla $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^2+y^4}$, $(x,y)\neq(0,0)$ sen sijaan on raja-arvo origossa: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. Kokeilemalla pitkin koordinaattiakseleita saadaan 0. Tästä voidaan päätellä, että *jos* raja-arvo on olemassa, sen on pakko olla 0. Arviointi

$$0\leq\left|\frac{x^3y}{x^2+y^4}\right|=\frac{|x^3y|}{x^2+y^4}\leq\frac{|x^3y|}{x^2}=|xy|,\quad x\neq 0,$$

on selvästi voimassa myös, kun $x=0$. Tästä nähdään, että raja-arvo on 0.

Funktion raja-arvon käsite voidaan esittää myös "$\varepsilon-\delta$" muodossa:

Olkoon $\mathbf{x}_*$ joukon A kosketuspiste. Silloin funktiolle $f:A\to\mathbb{R}$ pätee:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_*} f(\mathbf{x})=\ell$$

jos ja vain jos jokaisella $\varepsilon>0$ on olemassa sellainen $\delta>0$, että

$$\mathbf{x}\in A\setminus\{\mathbf{x}_*\}\ \ \&\ \ \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|<\delta \quad\Rightarrow\quad \|f(\mathbf{x})-\ell\|<\varepsilon.$$

2. Osittaisderivaatat

Oletetaan yhden reaalimuuttujan funktioiden derivointi tunnetuksi. Osittaisderivointi on silloin idealtaan yksinkertainen: pidetään muita muuttujia vakiona, paitsi sitä, jonka suhteen derivoidaan.

Jos funktion $f : A \to \mathbb{R}$ määrittelyjoukko A on avoin ja $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in A$, niin *f*:n **i:s osittaisderivaatta** on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t},$$

mikäli oikeanpuoleinen raja-arvo on olemassa.

Jos nämä osittaisderivaatat ovat olemassa jokaisessa *A*:n pisteessä jokaisella *i*, niin sanotaan: Funktiolla $f : A \to \mathbb{R}$ on **ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat**. Funktio on silloin **jatkuvasti differentioituva**, mikäli nämä osittaisderivaatat ovat jatkuvia.

Jos ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat voidaan osittaisderivoida, saadaan **toisen kertaluvun osittaisderivaatat**. Näistä käytetään merkintää

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{x})$$

Vastaavasti määritellään muut korkeamman kertaluokan osittaisderivaatat.

Derivointijärjestystä ei välttämättä voi vaihtaa.

Esim. 4 Funktiolla

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

on ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x \quad , x\in\mathbb{R}$ ja $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y \quad , y\in\mathbb{R}$, kuten erotusosamäärillä laskemalla nähdään. Siis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$ ja $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$.

Mutta onneksi tämä on harvinaista, sillä derivointijärjestys voidaan vaihtaa, jos toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia:

Lause 2. **Derivoimisjärjestyksen vaihto** Jos funktiolla $f:A\to\mathbb{R}$ on *jatkuvat* toisen kertaluvun osittaisderivaatat avoimessa joukossa *A*, niin jokaisessa *A*:n pisteessä **x** on voimassa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{x})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\mathbf{x})\ ,\ \text{kaikilla } i,j=1,2,\cdots,n\,.$$

3. Väliarvolause. Suunnatut derivaatat.

Reaalifunktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ väliarvolause takasi, että välillä (a,b) on piste *c*, jossa

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Funktion *f* riitti tässä olla suljetulla välillä $\left[a,b\right]$ jatkuva ja avoimella välillä (a,b) differentioituva.

Useamman muuttujan reaaliarvoiselle funktiolle $f:A\to\mathbb{R},\ A\subseteq\mathbb{R}^n$ avoin, saadaan jatkossa kehiteltyä vastaavanlainen tulos.

Oletetaan f :llä olevan ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat A:ssa.

Todetaan ensin, että tarkasteltaessa funktion *f* muuttumista aina *yhden* muuttujan x_i suhteen, saadaan reaalimuuttujan *t* funktio $t\mapsto f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)$. Tämän derivaatta kohdassa $t=0$ on silloin $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$. Jos *a* on sellainen luku, että jana $\left[\mathbf{x},\mathbf{x}+a\mathbf{e}_i\right]\subset A$, niin silloin reaalifunktioiden väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen vakio $0<\theta<1$, että

$$f(\mathbf{x}+a\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{x})=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}+\theta a\mathbf{e}_i)a.$$

Edellinen tulos ei vielä oikein käy väliarvolauseeksi, koska siinä on tehty muutoksia pisteestä **x** vain koordinaattiakselien suuntiin (eli kantavektorien $\mathbf{e}_i$ suuntiin. Koska kuitenkin mielivaltaiseen pisteeseen päästään ilmeisesti *n*:llä koordinaattiakselien suuntaisella askeleella, saadaan näin yleisempi tulos.

Lause 3. Olkoon säde $r>0$ sellainen, että avoin kuula $B_r(\mathbf{x})\subseteq A$, ja muutos **h** niin pieni, että $\mathbf{x}+\mathbf{h}\in B_r(\mathbf{x})$. Silloin on olemassa *n* pistettä $\mathbf{z}_1,\cdots,\mathbf{z}_n\in B_r(\mathbf{x})$, $\left\|\mathbf{x}-\mathbf{z}_i\right\|<\left\|\mathbf{h}\right\|$, joiden kautta kulkien funktion *f* saama muutos on

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{z}_i).$$

Osittaisderivaatat ovat määritelmän mukaan derivaattoja koordinaattiakseleiden suuntaan. Yleisemmin voidaan määritellä funktion $f : A \to \mathbb{R}$ **suunnattu derivaatta** pisteessä $\mathbf{x} \in A$ **suuntaan p**:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{p}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

(Tämä riippuu paitsi vektorin **p** suunnasta, myös sen pituudesta. Sen vuoksi monissa esityksissä määritellään suunnattu derivaatta vain yksikkövektorin suuntaan.)

Käyttämällä lauseen 2 tulosta, saadaan *jatkuvasti differentioituvalle* funktiolle f suunnattu derivaatta olemassa olevaksi jokaisessa avoimen joukon A pisteessä $\mathbf{x}$ ja jokaiselle suunnalle $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Suunnattu derivaatta voidaan silloin laskea osittaisderivaattojen avulla:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Tälle saadaan yksinkertainen esitysmuoto gradientin avulla.

Jos funktiolla $f : A \to \mathbb{R}$ on avoimessa joukossa A olemassa ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat, niin funktion f **gradientti** pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

Yleisimmin gradienttia pidetään vektorina, jolloin se on tässä esityksessä *pystyvektori*:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Käyttämällä gradienttia saamme jatkuvasti differentioituvalle funktiolle suunnatun derivaatan kaavaksi:

Lause 4. $$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{p}\,.$$

Kokoamalla tulokset yhteen saadaan:

Lause 5. Väliarvolause. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva avoimessa joukossa *A*. Jos jana $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h}]$ sisältyy joukkoon *A*, niin on olemassa sellainen luku θ, $0<\theta<1$, että

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h})^T \mathbf{h}\,.$$

Suunnattu derivaatta kertoo funktion muutosnopeuden suuntaan **p**, jos **p** on yksikkövektori.

Silloin jos suunnaksi otetaan gradientin suunta normeerattuna, nähdään, että *funktio kasvaa nopeimmin gradienttinsa suuntaan*. Vastaavasti voidaan todeta, että *funktio pienenee nopeimmin gradienttinsa vastasuuntaan.*

Ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaattojen olemassaolo ei vielä takaa funktion jatkuvuutta. Esimerkkinä siitä käy funktio

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\quad, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Mutta osittaisderivaattojen jatkuvuus pelastaa taas tilanteen:

Lause 6. Jos $f:A\to\mathbb{R}$ on avoimessa joukossa $A\subseteq\mathbb{R}^n$ määritelty jatkuvasti differentioituva funktio (eli funktiolla on joukossa *A* jatkuvat ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat), niin *f* on jatkuva.