MAT-13440 LAAJA MATEMATIIKKA 4

Tampereen teknillinen yliopisto
Risto Silvennoinen
Helmi-maaliskuu 2010

Luku 1. Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$

1. Avaruus $\mathbb{R}^n$ sisätuloavaruutena

Kertaamme syksyn puolelta vektoreiden ja *n*-ulotteisen avaruuden peruskäsitteitä. Koska matriisilaskenta on meillä käytettävissä, korostamme vektorien matriisiolemusta.

Vektorilla tarkoitetaan järjestettyä äärellisen monen luvun jonoa. Esimerkiksi (1, 2, 2, -5) on nelikomponenttinen kokonaislukuvektori ja

$$\begin{bmatrix} 2.3 \\ 1.8 \\ 3.13 \\ 8.1 \\ 7.9 \\ 11.3 \end{bmatrix}$$ kuusikomponenttinen reaalilukuvektori. Edellinen on muodoltaan

vaakavektorii ja jälkimmäinen *pystyvektori*.

Vektoreiden yleinen teoria on peräisin havainnollisista tapauksista eli kaksi- ja kolmeulotteisista avaruuksista (n=2, n=3).

Vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on $n \times 1-$matriisi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Tätä niin sanottua *pystyvektoriesitystä* pidetään useimmiten vektorin oletusmuotona. Syynä siihen on yhteensopivuus matriisilaskennan kanssa. Mutta myös *vaakavektoriesitys* $[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$ on tietyissä tilanteissa paikallaan. Vaakavektoria merkitään usein myös tavallisilla suluilla: $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, jolloin sitä sanotaan usein myös **pisteeksi**.

Vaakavektori voidaan muuntaa pystyvektoriksi ja päinvastoin **transponoimalla**:

$$[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n].$$

Tilasyistä pystyvektorit annetaan usein transponoidussa muodossaan.

Vektoreille määritellään laskutoimitukset **skalaarilla kertominen** ja **yhteenlasku** seuraavasti ("komponenteittain"):

$$a\mathbf{x} = a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix} \quad , \qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Avaruus $\mathbb{R}^n$ eli ***n*-ulotteinen euklidinen avaruus** määritellään tässä kurssissa $n\times 1$-matriisien ("**vektorien**") joukoksi, jossa on matriisialgebrasta periytyvät laskutoimitukset: vektorien yhteenlasku ja skalaarilla kertominen, sekä vektorien välinen sisätulo.

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n\}$$

Laskutoimitukset noudattavat seuraavia lakeja, jotka seuraavat matriisialgebran säännöistä. Luettelemme ne kuitenkin uudestaan tässä, koska saatujen ehtojen kokoelma määrittelee yleisemmän käsitteen **vektoriavaruus**. Avaruus $\mathbb{R}^n$ on siis esimerkki vektoriavaruudesta. Muita vektoriavaruuksia ovat mm. erilaiset funktioista koostuvat funktioavaruudet.

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ toteutuvat seuraavat (reaalisen) **vektoriavaruuden aksioomat**:

VA1. Joukossa $\mathbb{R}^n$ on määritelty vektoreiden $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ **yhteenlasku**:
$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

VA2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

VA3. On olemassa **nollavektori**: $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

VA4. Jokaisella vektorilla on **vastavektori**: $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

VA5. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

VA6. Joukossa $\mathbb{R}^n$ on määritelty **skalaarilla kertominen**:
$a\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall a \in \mathbb{R}$

VA7. $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall a \in \mathbb{R}$

VA8. $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall a, b \in \mathbb{R}$

VA9. $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall a, b \in \mathbb{R}$

VA10. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Nämä otetaan yleisessä tapauksessa siis aksioomiksi vektoriavaruudelle, nyt ne ovat seurauksia matriisialgebrasta.

Lisäominaisuuksia (jotka sitten ovat yleisessä tapauksessa lauseina johdettavissa yllä olevista aksioomista) ovat mm. seuraavat:

- $a\mathbf{0} = \mathbf{0}, \forall a \in \mathbb{R}$
- $0\mathbf{x} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- $a\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow a = 0$ tai $\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall a \in \mathbb{R}$
- $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Sisätuloa koskevia ominaisuuksia tarkastelemme alempana. Yleisesti vektoriavaruuksia, joissa on määritelty sisätulo, sanotaan **sisätuloavaruuksiksi**, joista $\mathbb{R}^n$ on siis yksi.

Kertolaskua ei suoraan kahden pystyvektorin eli n+1-matriisin kesken ole mahdollista toimittaa muuten kuin transponoimalla toinen:

Tulo $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ on vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ **skalaaritulo** eli **sisätulo** eli **pistetulo**. Eli auki kirjoitettuna:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k .$$

Sisätuloa merkitään myös $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$, josta nimitys pistetulo, ja varsinkin yleisemmissä sisätuloavaruuksissa $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Sisätulo toteuttaa säännöt ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$):

SA1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

SA2. $\langle (\mathbf{x} + \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

SA3. $\langle (a\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

SA4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ ja $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Kirjoita nämä säännöt myös matriisitulon ja pistetulon merkintöjä käyttäen!

Vektorin $\mathbf{x}$ **normi** eli **pituus** on

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}\,.$$

Sisätuloavaruutta, jossa on määritelty normi, sanotaan myös **normiavaruudeksi**.

Normi toteuttaa ehdot ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$):

NA1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ja $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

NA2. $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$

NA3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ **(Kolmioepäyhtälö)**

Näistä kaksi ensimmäistä seuraavat suoraan sisätulon ominaisuuksista.
Kolmioepäyhtälön todistamiseksi tarvitsemme toista nimeltä tunnettua epäyhtälöä:

Lause 1. Cauchy-Schwarzin epäyhtälö Kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ on voimassa

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

ja yhtäsuuruus pätee, jos ja vain jos $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tai $\mathbf{y} = c\mathbf{x},$ jollakin $c \in \mathbf{R}$.

Cauchy-Schwarzin epäyhtälön todistus: Osoitetaan väite oikeaksi ensin yksikkövektoreille **u**, **v**: (käytetään nyt matriisinotaatiota mukavuussyistä)

$0 \leq \|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} \pm \mathbf{v})^T (\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{u} \pm 2\mathbf{u}^T \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^T \pm 2\mathbf{u}^T \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2$ eli

$0 \leq 1 \pm 2\mathbf{u}^T \mathbf{v} + 1,$ josta seuraa $\mp 2\mathbf{u}^T \mathbf{v} \leq 2$ eli $|\mathbf{u}^T \mathbf{v}| \leq 1.$

Yhtäsuuruus on täsmälleen tapauksessa $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\| = \mathbf{0}$ eli kun $\mathbf{u} = \pm\mathbf{v}.$

Yleinen tapaus: Olkoot $\mathbf{x} = a\mathbf{u},$ $\mathbf{y} = b\mathbf{v},$ $a = \|\mathbf{x}\|$, $b = \|\mathbf{y}\|.$ Silloin

$|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| = |(a\mathbf{u})^T (b\mathbf{v})| = ab|\mathbf{u}^T \mathbf{v}| \leq ab \cdot 1 = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$. Yhtäsuuruus on voimassa, kun ab=0 tai (jakamalla ab:llä) kun $|\mathbf{u}^T \mathbf{v}| = 1$ eli kun $\mathbf{u} = \pm\mathbf{v}.$ Silloin

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tai $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ $(= 0\mathbf{x})$ tai $\mathbf{y} = \pm \frac{b}{a}\mathbf{x}$. □ (Toinen todistus, ks. Fizpatrick s.274., Trench s. 284)

Kolmioepäyhtälön todistus:

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y})^T (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2$

$\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$.

Tässä käytettiin epäyhtälöä $a \leq |a|, \forall a \in \mathbf{R}$ ja Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä.

Pisteiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ väliseksi **etäisyydeksi** määritellään

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

Sisätulon avulla voidaan nyt määritellä nollasta eroavien vektorien **x** ja **y** **välinen kulma**:

$$\theta = \arccos\frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$

Kun kulma on $\pi/2$, niin vektorit **x** ja **y** ovat **kohtisuorassa** toisiaan vastaan eli **ortogonaaliset**, merkitään $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$. Ortogonaalisuusehto on siis

$$\mathbf{x}\perp\mathbf{y} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{x}^T\mathbf{y}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{x}\bullet\mathbf{y}=0.$$

Jos vektorien välinen kulma on 0, vektorit ovat **samansuuntaiset** ja jos se on π, vektorit ovat **vastakkaissuuntaiset**. Yhteisnimitys näille on **yhdensuuntaiset**. Merkinnät ovat

$$\mathbf{x}\uparrow\uparrow\mathbf{y},\quad \mathbf{x}\uparrow\downarrow\mathbf{y},\quad \mathbf{x}\,||\,\mathbf{y}.$$

Lause 2.
Ortogonaalisille vektoreille pätee (yleistetty) **Pythagoraan lause**:

$$\mathbf{x}\perp\mathbf{y} \quad\Rightarrow\quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2.$$

Tämä seuraa kolmioepäyhtälön todistuksesta, kun huomataan, että nyt $\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\mathbf{0}$.

Geometrisesti vektorit tulkitaan avaruudessa $\mathbb{R}^2$ seuraavasti:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$$

missä $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ovat tason **luonnolliset kantavektorit.**

Vastaava esitys pätee kolmiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Tällöin tason vektori voidaan tulkita **suuntanuoleksi** origosta pisteeseen (x_1, x_2), ja samaksi vektoriksi geometrisessa mielessä katsotaan mikä hyvänsä tästä saatava suuntanuoli, jonka suunta ja pituus ovat samat. Jos tarkoitetaan nimenomaan paikallaan olevaa origosta pisteeseen (x_1, x_2) menevää nuolta, puhutaan **paikkavektorista**.
Monesti vektori $\mathbf{x}$ samaistetaan myös **pisteen** (x_1, x_2) kanssa.

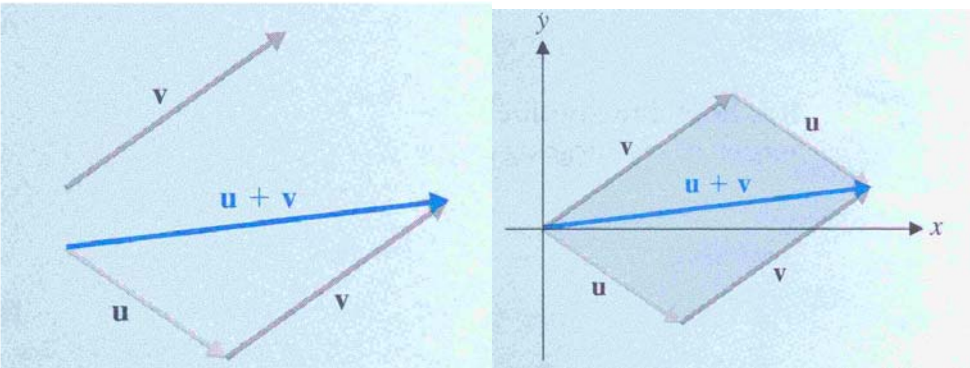
Asiayhteydestä yleensä selviää, mitä kolmesta geometrisesta muodosta oliolla "vektori" $\mathbf{x}$ tarkoitetaan:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} = (x_1, x_2) \ .$$

Vastaavat yhteydet ovat voimassa avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja yleisesti avaruudessa $\mathbb{R}^n$, jossa luonnolliset kantavektorit ovat vektorit

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Yhteenlasku ja vähennyslasku voidaan silloin geometrisesti ilmaista **suunnikassäännöillä**:



Käyttämällä näitä tulkintoja moni geometrinen käsite voidaan siirtää (yleistää) yleiseen n-ulotteiseen avaruuteen (joita useimmat sovelluksissa käytettävät avaruudet ovat!)

Projektio

Vektorin $\mathbf{x}$ (ortogonaalinen) projektio vektorille $\mathbf{y}$ on

$$proj_{\mathbf{y}}\mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}\mathbf{y}.$$

Vektorin $\mathbf{y}$ suuntainen **yksikkövektori** on vektori

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}.$$

`

Tätä käyttäen voidaan projektion kaava perustella trigonometrian avulla kosinin määritelmään nojautuen.

Suoraan pistetulolla laskemalla todetaan, että erotusvektori

$$\mathbf{x} - proj_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$$

todella on kohtisuorassa vektoria $\mathbf{y}$ vastaan.

Tämä tarjoaa yhden mahdollisuuden muodostaa annetulle vektorille $\mathbf{y}$ kohtisuora suunta: Valitaan mikä hyvänsä vektori $\mathbf{x}$, joka ei ole vakio kertaa $\mathbf{y}$, ja muodostetaan edellä mainittu erotus.

Jos **u** on yksikkövektori, niin

$$proj_{\mathbf{u}}\mathbf{x} = (\mathbf{x} \bullet \mathbf{u})\mathbf{u}.$$

Tätä sanotaan myös vektorin **x** *komponentiksi* vektorin **u** suuntaan.

2.. Jonojen suppeneminen $\mathbb{R}^n$:ssä

Pistejonon suppenemisessa etäisyytenä käytetään "euklidista etäisyyttä"

dist(**u**-**v**) = ||**u**-**v**||.

Pistejono $\left(\mathbf{u}_k\right)$ (eli vektorijono) **suppenee** kohti pistettä **u**, jos ja vain jos jokaista positiivista lukua ε vastaa sellainen indeksi K, että

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u}_k,\mathbf{u}) < \varepsilon, \quad \text{kun } k \geq K.$$

Päätulos, joka samalla tekee jonoilla laskemisen helpoksi, on

Lause 3.
Jono $(\mathbf{u}_k)$ suppenee avaruudessa $\mathbb{R}^n$ kohti pistettä **u** täsmälleen silloin, kun jokainen komponenttijono (u_{ki}) suppenee kohti raja-arvoa u_i, eli

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \\ \vdots \\ u_{kn} \end{bmatrix} \to \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad u_{k1} \to u_1 \;\&\; u_{k2} \to u_2 \;\&\cdots\&\; u_{kn} \to u_n .$$

Tod. Seuraus epäyhtälöistä

$$\left|x_j\right| = \sqrt{x_j^{\,2}} \leq \sqrt{x_1^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}} = \|\mathbf{x}\| \leq n \max_{i=1,\cdots,n} \left|x_i\right| .$$

3. Avoimet ja suljetut joukot $\mathbb{R}^n$:ssä.

Tämä pykälä käsittelee $\mathbb{R}^n$:n **topologiaa**. Koska $\mathbb{R}^n$:ssä on määritelty etäisyysfunktio dist, se on **metrinen avaruus** ja sellaisena myös **topologinen avaruus**. Topologisia käsitteitä ovat mm. joukon reuna, sisäosa, yhtenäisyys, kuvausten jatkuvuus jne.

Topologia määräytyy **avoimista joukoista**.

Pisteen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ **avoin ympäristö** eli **u**-keskinen **avoin kuula** on joukko

$$B_r(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < r\}.$$

Joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ piste **u** on A:n **sisäpiste**, jos on olemassa avoin ympäristö $B_r(\mathbf{u})$, joka kokonaisuudessa sisältyy A:han:

$$B_r(\mathbf{u}) \subseteq A.$$

Joukon A kaikki sisäpisteet muodostavat joukon A **sisäosan** $\mathrm{int}\, A$.

Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on **avoin**, jos sen kaikki pisteet ovat sen sisäpisteitä, eli jos ja vain jos

$$\mathrm{int}A = A.$$

Lause 4. Avoin kuula on avoin joukko.

Tod. Luennolla.

Joukko F on **suljettu**, jos se sisältää kaikkien suppenevien jonojensa raja-arvot. Siis suljettua joukkoa karakterisoi ominaisuus:

$$\mathbf{u}_k \in F,\ k = 1, 2, \cdots \quad \& \quad \mathbf{u}_k \to \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} \in F\,.$$

Joukko-oppia:

Joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **komplementti** on niiden pisteiden joukko, jotka eivät kuulu A:han:

$$\mathbb{R}^n \setminus A = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u} \notin A\}\,.$$

Tarvitsemme myös yleisen **joukkoperheen** eli **joukkojen kokoelman** $\{A_s\}_{s \in S}$ **yhdisteen** ja **leikkauksen** käsitteet:

$$\bigcup_{s \in S} A_s = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, s \in S : \mathbf{u} \in A_s\}$$

$$\bigcap_{s \in S} A_s = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, s \in S : \mathbf{u} \in A_s\}.$$

Näille ovat voimassa *DeMorganin lait*:

Yhdisteen komplementti on komplementtien leikkaus.

Leikkauksen komplementti on komplementtien yhdiste.

Avoimien ja suljettujen joukkojen välillä pätee yhteys:

Lause 5. Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin täsmälleen silloin, kun sen komplementti on suljettu.

(Todistus käydään läpi luennolla.)

Lause 6. Avoimien joukkojen kaikki yhdisteet ovat avoimia, ja samoin suljettujen joukkojen kaikki leikkaukset ovat suljettuja.

Lause 7. Äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on aina avoin, ja samoin äärellisen monen suljetun joukon yhdiste on aina suljettu.

Esimerkeillä voidaan näyttää, ettei äärellisyysoletuksista yllä voida luopua.

Piste $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ on joukon *A* **ulkopiste**, jos on olemassa **u**:n avoin ympäristö $B_r(\mathbf{u}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$

Kaikkien joukon *A* ulkopisteiden joukko muodostaa *A*:n **ulko-osan** ext*A*.

Piste $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ on joukon *A* **reunapiste**, jos jokainen **u**-keskinen avoin kuula sisältää sekä *A*:n että sen komplementin $\mathbb{R}^n \setminus A$ pisteitä.

Kaikkien joukon *A* reunapisteiden joukko muodostaa *A*:n **reunan** bd*A*.

Avaruus $\mathbb{R}^n$ jakaantuu siis joukon *A* kannalta kolmeen erilliseen joukkoon: *A*:n sisäosaan, reunaan ja ulko-osaan.
Avoimelle ja suljetulle joukolle saadaan reunan avulla havainnollinen sisältö:

Lause 8. Joukko *A* on avoin täsmälleen silloin, kun se ei sisällä yhtäkään reunapistettään.

Lause 9. Joukko *A* on suljettu täsmälleen silloin, kun se sisältää kaikki reunapisteensä.

(Todistus käydään läpi luennolla.)

Edellä olevista selviää, että joukon *A* ei tarvitse olla kumpaakaan tyypistä suljettu tai avoin (sehän voi sisältää osan reunapisteistään).